

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

rješenja 1. kolokvija – 26. studenog 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

(a) (6 bodova) Zapišite simbolima tvrdnju

Za svaki prirodan broj veći od 30, postoji realan broj koji je veći od njega i manji od 100 ili manji od njega i veći od 100.

i njenu negaciju. Odredite istinitost svake od tvrdnji.

(b) (4 boda) Odredite neki sud F za koji je sud

$$(A \Leftrightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg F)$$

tautologija. Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje 1. zadatka

(a) Zapis simbolima:

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 30 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} ((x > n \wedge x < 100) \vee (x < n \wedge x > 100))).$$

Negacija:

$$\exists n \in \mathbb{N} (n > 30 \wedge \forall x \in \mathbb{R} ((x \leq n \vee x \geq 100) \wedge (x \geq n \vee x \leq 100))).$$

Tvrdnja je lažna, jer za $n = 100$ ne postoji realan broj između 100 i 100. Kako je tvrdnja lažna, njena negacija je istinita.

(b) Implikacija je lažna jedino u slučaju kad je premisa istinita, a konkluzija lažna. Dakle, kad god je $A \Leftrightarrow \neg B$ istinito, $(A \vee B) \wedge \neg F$ treba biti istinito. Primijetimo da ako je $A \Leftrightarrow \neg B$ istinito, onda su A i B različitih istinitosnih vrijednosti, pa je $A \vee B$ istinito. Stoga je dovoljno da $\neg F$ bude istinito, odnosno F lažno. Dakle, za F možemo uzeti bilo koji sud koji je uvijek lažan, npr. $A \wedge \neg A$.

Komentari o bodovanju. Tvrdnja i negacija su nosili 4 boda, a istinitost 2 boda. Mnogi su zapisali tvrdnju bez implikacije, nego samo započeli rečenicu sa

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > 30)(\text{ostatak tvrdnje}).$$

To je možda malo manje formalno točno ali značenje je i dalje jasno, pa je ipak bilo priznavano. Međutim, tada negacija treba glasiti

$$(\exists n \in \mathbb{N})(n > 30)(\text{negacija ostatka tvrdnje}),$$

jer negacija od “za svaki prirodan broj $n > 30$ vrijedi X ” je “postoji prirodan broj $n > 30$ takav da ne vrijedi X ”. U tom slučaju ste izgubili 1.5 bodova na tvrdnji i negaciji (odnosno 1 bod manje, koji postaje 2 boda manje ako u ostatku zadatka postoji neka slična sitna greška).

Očekivalo se od vas da obrazložite zašto je tvrdnja lažna, odnosno zašto je negacija istinita.

Zadatak 2. (12 bodova) Neka su A , B , C i D skupovi.

(a) (8 bodova) Ispitajte odnos skupova

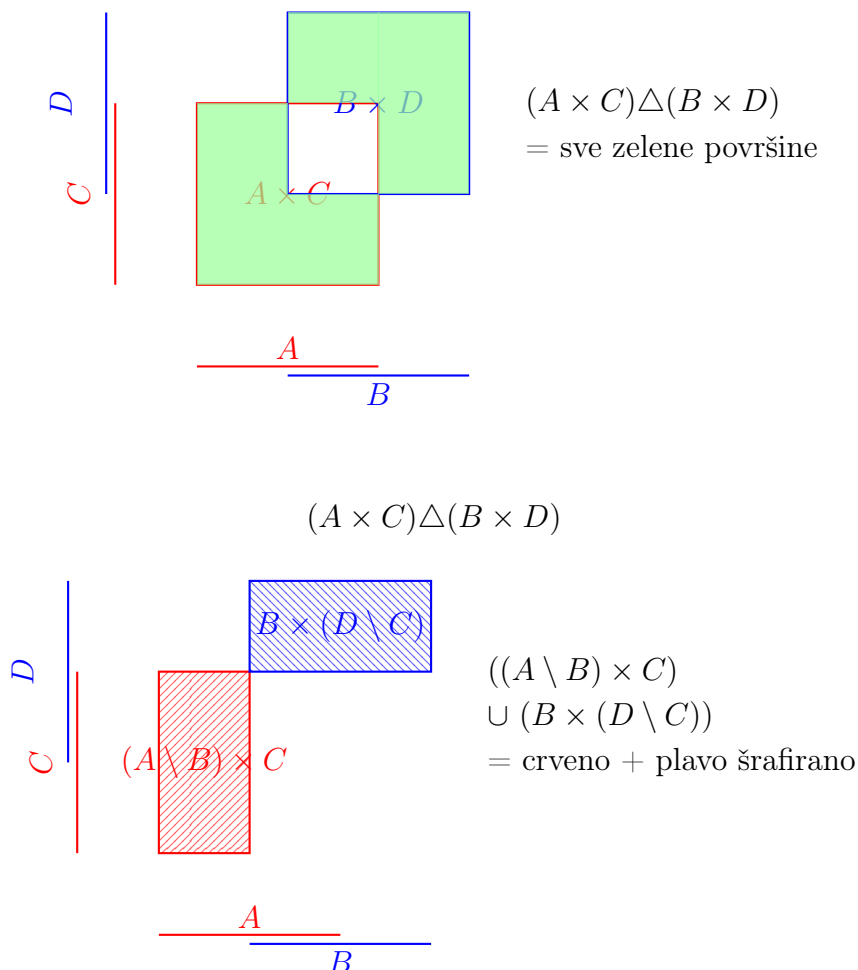
$$(A \times C) \triangle (B \times D) \quad \text{i} \quad ((A \setminus B) \times C) \cup (B \times (D \setminus C)).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

(b) (4 boda) Dokažite da je $A \setminus B = \emptyset$ ako i samo ako je $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

Rješenje 2. zadatka

(a)



Iz vizualizacije pomoću koordinatnog sustava naslućujemo da je

$$(A \times C) \triangle (B \times D) \supseteq ((A \setminus B) \times C) \cup (B \times (D \setminus C)),$$

te da obratna inkluzija općenito ne vrijedi.

Za protuprimjer, uzmimo $A = B = C = \{1\}$ i $D = \emptyset$. Tada je $A \times C = \{(1, 1)\}$, $B \times D = \emptyset$ i njihova simetrična razlika je $\{(1, 1)\}$. S druge strane, $(A \setminus B) \times C$ i $B \times (D \setminus C)$ su oba prazni skupovi.

Dokažimo sada suprotnu inkluziju. Neka je $(x, y) \in ((A \setminus B) \times C) \cup (B \times (D \setminus C))$.

Ako je $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$, onda slijedi $x \in A$, $x \notin B$, $y \in C$. Slijedi da je $(x, y) \in A \times C$, a kako $x \notin B$ slijedi i $(x, y) \notin B \times D$. Dakle, (x, y) se nalazi u simetričnoj razlici od $A \times C$ i $B \times D$.

Slučaj kad je $(x, y) \in B \times (D \setminus C)$ je analogan, tada se dokaže da je $(x, y) \in B \times D$ i $(x, y) \notin A \times C$.

(b) Pretpostavimo da je $A \setminus B$ prazan. To znači da je svaki element skupa A ujedno sadržan i u B , odnosno $A \subseteq B$. Međutim, onda je svaki podskup od A ujedno i podskup od B , pa je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, iz čega slijedi $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

Pretpostavimo sada da je $A \setminus B$ neprazan. Tada postoji $x \in A$ takav da $x \notin B$. Tada je $\{x\}$ podskup od A koji nije podskup od B , pa je $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ i $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$, pa je $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ neprazan.

Komentari o bodovanju. U (a) dijelu, česta greška je bila da $(x, y) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$ pojednostavite u

$$x \in A \wedge x \notin C \wedge y \in B \wedge y \notin D,$$

što nije točno. Naime, da bi (x, y) bio u razlici tih skupova, x mora biti u A , y mora biti u B , te barem jedno od $x \in B, y \in D$ mora biti lažno: čim npr. x nije element skupa B , par (x, y) ne može biti element skupa D . Takva greška je nažalost često rezultirala s 0 bodova na zadatku, jer uz tu grešku dobijete da vrijedi suprotna inkluzija od one koju trebate dokazati.

Što se tiče bodovanja, 5 bodova je donosio dokaz, a 3 boda protuprimjer. U nekim situacijama je protuprimjer bio implicitan ali niste ga precizno zapisali, u kojem slučaju ste dobili 1 ili 2 od 3 boda na tom dijelu. Neki od vas su, unatoč krivom odgovoru, napravili dobar napredak prema dokazu tako što ste točno raspisali što znači da je (x, y) u nekom od skupova, te ste za to dobili 1,2 ili 3 boda od 5 predviđenih za dokaz. Vizualizacija sama po sebi nije nosila bodove, ali ako ste točno nacrtali i pomoću toga pogodili koja inkluzija vrijedi, dobili ste 1 bod.

U (b) dijelu, mnogi su netočno zaključili da $A \setminus B = \emptyset$ implicira $A = B$. Ono što to zapravo implicira je $A \subseteq B$. Na primjer, ako je $A = \{1\}$ i $B = \{1, 2\}$, također vrijedi $A \setminus B = \emptyset$. U takvim situacijama je također najčešći broj bodova bio 0, jer taj početni krivi korak zadatak čini trivijalnim. S druge strane, oni koji su samo točno zaključili da iz $A \setminus B = \emptyset$ slijedi $A \subseteq B$ su dobili 1 bod.

Još neke od čestih grešaka su bile tvrdnje poput $x \in A \implies x \in \mathcal{P}(A)$ ili $A \subseteq \mathcal{P}(A)$, što nije istinito. Neki studenti su možda imali točan dokaz na umu, ali nisu dovoljno obrazložili tvrdnje, pa su im oduzeti neki bodovi.

Zadatak 3. (16 bodova)

(a) (10 bodova) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija ρ definirana s

$$a \rho b \iff a + 2b \text{ je djeljiv s } 3.$$

(a1) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Je li antisimetrična?

(a2) Odredite klasu ekvivalencije elementa 2025.

(b) (6 bodova) Pronađite primjer relacije parcijalnog uređaja na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja sadrži točno 13 elemenata i s obzirom na koju skup $\{1, 4\}$ nema nijednu gornju među. Nije potrebno obrazlagati svoj odgovor.

Rješenje 3. zadatka

(a) Da bismo dokazali da je ρ relacija ekvivalencije, treba provjeriti da je ρ refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Refleksivnost. Za svaki $a \in \mathbb{N}$ vrijedi $3 \mid a + 2a$, pa je relacija refleksivna.

Simetričnost. Pretpostavimo da $3 \mid a + 2b$. Treba dokazati da $3 \mid b + 2a$. Primijetimo da je $(a + 2b) + (b + 2a) = 3(a + b)$ djeljiv s 3. Dakle, $b + 2a$ je razlika dva broja djeljiva s 3, pa je i sam djeljiv s 3.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da $3 \mid a + 2b$ i $3 \mid b + 2c$. Tada 3 dijeli i zbroj tih brojeva, pa $3 \mid a + 2b + b + 2c = a + 2c + 3b$. Kako je $a + 2c + 3b$ djeljiv s 3, a $3b$ je očito djeljiv s 3, slijedi da je i $a + 2c$ djeljiv s 3.

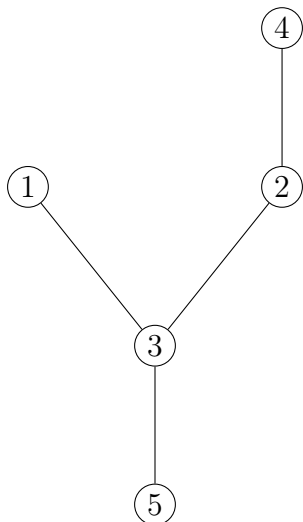
Relacija nije antisimetrična, jer je $1 \rho 4$ i $4 \rho 1$, a $4 \neq 1$.

Klasa od 2025 je skup svih prirodnih brojeva n takvih da je $n \rho 2025$, odnosno skup svih n takvih da $3 \mid n + 2 \cdot 2025$. Kako je $2 \cdot 2025$ djeljiv s 3, to znači da je i n djeljiv s 3, pa je

$$[2025] = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je djeljiv s } 3\}.$$

(b) Možemo uzeti sljedeći uređaj:

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (2, 4)\}.$$



Komentari o bodovanju. Refleksivnost i antisimetričnost su nosile po 1 bod, simetričnost i tranzitivnost po 3 boda. Određivanje klase od 2025 nosilo je 2 boda.

Svaki “dokaz” refleksivnosti/simetričnosti/tranzitivnosti pomoću primjera nosio je 0 bodova: ako dokazujete da neko svojstvo vrijedi za sve prirodne brojeve, nije dovoljno samo uzeti primjer!

Neki su drugačije zapisali klasu od 2025. Ovisno o tome koliko je bilo jasno bilo iz njihovog zapisa isčitati o kojem se skupu radi, dobili su ili oba boda ili samo 1 bod.

Što se tiče (b) dijela, kriterij je bio takav da primjer parcijalnog uređaja koji zapravo nije parcijalni uređaj automatski nosi 0 bodova (najčešće bi tranzitivnost bila narušena). Ako je netko smislio bilo koji parcijalni uređaj s 13 elemenata (bez uvjeta na gornje međe), dobio je 4 od 6 bodova. Postoje rijetki primjeri studenata koji su dobili 1 ili 2 boda ako je bilo moguće isčitati djelomični napredak.

Zadatak 4. (12 bodova)

(a) (6 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $\sqrt[n]{2+n} \leq 2$.

(b) (6 bodova) Neka je $a_1 = 1$ i za svaki prirodan broj $n \geq 1$ definiramo $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + n}$. Dokažite da je $a_n \leq 2$ za svaki prirodan broj n .

Rješenje 4. zadatka

(a) Tvrdnja je ekvivalentna s $2^n \geq n + 2$ za svaki $n \geq 2$. Dokazat ćemo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Baza indukcije. Za $n = 2$, vrijedi $2^2 \geq 2 + 2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $2^n \geq n + 2$. Želimo dokazati da vrijedi $2^{n+1} \geq (n + 1) + 2$.

Primijetimo da je $2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq 2^n + 1$. Iz pretpostavke indukcije imamo $2^n \geq n + 2$, pa je

$$2^{n+1} \geq 2^n + 1 \geq (n + 2) + 1,$$

čime je korak indukcije proveden.

Po principu matematičke indukcije, za svaki $n \geq 2$ vrijedi $2^n \geq n + 2$ odnosno $2 \geq \sqrt[n]{n+2}$.

(b) Dokazat ćemo tvrdnju matematičkom indukcijom, koristeći dokazanu tvrdnju iz (a) podzadatka.

Baza indukcije. Za $n = 1$, vrijedi $a_1 = 1 < 2$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $a_n \leq 2$. Želimo dokazati da vrijedi $a_{n+1} \leq 2$.

Primijetimo da je

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{n + a_n} \leq \sqrt[n]{n + 2},$$

jer je $a_n \leq 2$ prema pretpostavci indukcije. Nadalje, prema (a) podzadatku slijedi $\sqrt[n]{n+2} \leq 2$, pa je $a_{n+1} \leq 2$ kao što je i trebalo dokazati.

Komentari o bodovanju. Kao poklon pod bor, svi koji su točno provjerili bazu indukcije u barem jednom od podzadataka dobili su 1 bod. (Ako ste provjerili obje baze, to ne znači da dobijete 2 boda.)

Mnogi se nisu sjetili uzeti n -tu potenciju u početnom uvjetu, što im je onda otežalo zadatak i često nažalost nisu uspjeli napraviti napredak.

Postoje studenti koji su riješili (a) dio, pa su (b) dio sveli na tvrdnju iz (a) dijela koju su upravo dokazali i svejedno još jednom dokazali tvrdnju iz (a) dijela. Neki su ju čak dokazali na drugačiji način. Naravno, to je u redu i dobili ste bodove, ali mogli ste se samo pozvati na tvrdnju iz (a) dijela.

Tako su onda studenti koji nisu znali riješiti (a) dio ali su (b) dio sveli na $2^n \geq n + 2$ dobili velik udio bodova (ponekad čak svih 6) na (b) dijelu zadatka.

Mnogi su pisali da 2^n raste eksponencijalno, a $n + 2$ linearno. To je točno, ali nažalost nije dovoljno dobar argument. Uzmite za primjer nizove 1.0001^n i $10^{10} \cdot n$. Prvi je eksponencijalan, drugi je linearan, a drugi je veći od prvog za puno brojeva n . Ako ste htjeli primijeniti argument takvog tipa, trebali biste ili komentirati $2^{n+1} - 2^n \geq (n+3) - (n+2)$ (odnosno da lijeva strana raste brže od desne), ili npr. derivirati 2^x i $x + 2$ i zaključiti da 2^x ima veću derivaciju.